4 ÖLÇÜLEBİLİR KÜMELER ; CARATHEODORY KARAKTERİZASYONU

Tanım: Tanım kümesi, kümeler ailesi olan bir fonksiyona, küme fonksiyonu denir.

m küme fonksiyonu olmak üzere, $m(A\cup B) \leq m(A)+m(B)$ şartı sağlanıyorsa m'ye yarıtoplamsal denir. $A\cap B=\emptyset$ olmak üzere

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)$$

şartını sağlayan m küme fonksiyonuna toplamsal denir. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler ayrık olmak üzere

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

şartını sağlayan m küme fonksiyonuna sonlu toplamsal ve $A_1, A_2, \ldots$ ayrık kümeler ailesi

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

şartını sağlarsa m küme fonksiyonuna sayılabilir toplamsal veya σ-toplamsal denir.

Bir önceki bölümde tanımladığımız m küme fonksiyonu, maddeleseft bütün kümeler üzerinde sayılabilir toplamsal değildir. Sayılabilir toplamsal olan, biz bu kümelere ölçülebilir kümeler diyeceğiz, kümeleri belirlemeliyiz.

Eğer E, $(0,1)$'de herhangi bir küme ve E' onun $(0,1)$'e göre bütünleyeni, yani $E'=(0,1)-E$, ise toplamsallık için minimum gereksinim kesinlikle

$$m(E)+m(E')=m(0,1)=1$$

olmasıdır. Bu koşul, m'nin sayılabilir toplamsal olacağı kümeler için ayırtedici bir özellik olacaktır. Bu yüzden aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

Tanım: $E\subset(0,1)$ ve $E'=(0,1)-E$ olmak üzere

$$m(E)+m(E')=1$$

ise E'ye ölçülebilir denir.

Tanımdan hemencecik, E'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şartın E''nün ölçülebilir olması gerekteğini görebiliriz. Ayrıca m'nin yarıtoplamsallığından

$$m(E)+m(E')\geq m(0,1)=1$$

olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre, E'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$m(E)+m(E')\leq 1$$

olmasıdır.

Bu bölümde, aralıkların ölçülebilir kümelere dahil olduğunu ve ölçülebilir kümelerin, sayılabilir kesişim ve birleşim altında kapalı olduklarını göreceğiz.

Sınıflandırma ve notasyon hakkında bir uyarı: Çoğu kitaplarda, bizim m fonksiyonu için m^* notasyonu kullanılır ve Lebesgue dış ölçüsü olarak adlandırılır. Bu kitapda yazar, m^* fonksiyonunun ölçülebilir kümelere kısıtlanmasını da m ile gösterecek ve Lebesgue ölçüsü diyecektir. E, ölçülebilir küme olsun veya olmasın E'nin ölçüsü m(E) ile gösterilecektir. Ölçülebilirlik, toplamsallığın kritik özelliğine sahip m için gerekli olduğundan, m(E)'yi yalnızca ölçülebilir kümeler üzerinde düşüneceğiz.

<u>Teorem 1</u> i) $m(E)=0$ ise E ölçülebilirdir.
ii) Aralıklar ölçülebilirdir.

<u>Kanıt:</u> i) $m(E)=0$ ise $m(E)+m(E')=m(E')\leq 1$ olduğundan E ölçülebilirdir.

ii) $J=(a,b)$ aralığı $(0,1)$'in bir öz alt aralığı ve J_1, J_2 aralıkları J'nin (0,1)'e göre bütünleyenleri olmak üzere $J'=J_1\cup J_2$ olsun. (Eğer $J=(0,b)$ veya $J=(a,1)$ ise J_1, J_2'den biri boş küme olacaktır). Bir aralığın ölçüsü onun uzunluğu olduğu için

$$m(J_1)+m(J)+m(J_2)=1$$

dir.

Bu yüzden

$$m(J') \le m(J_1)+m(J_2) = 1-m(J)$$

$$m(J)+m(J') \le 1$$

dir. Aralık kapalı, yarı açık olduğunda da bu yöntem geçerlidir. ■

Eğer J_1 ve J_2 $(0,1)$'de iki ayrık aralık ise bir önceki bölümdeki problem 6'ya göre, herhangi bir E kümesi için

$$m(E\cap(J_1\cup J_2)) = m(E\cap J_1)+m(E\cap J_2)$$

dir. Şimdi bunu sonlu ve sayılabilir $\{J_i\}$ ailelerine genişletelim.

Teorem 2: Eğer $\{J_i\}$, $(0,1)$'de sonlu veya sayılabilir ayrık aralıklar ailesi ise herhangi E kümesi için

$$m(E\cap \bigcup J_i) = \sum m(E\cap J_i)$$

dir.

Kanıt: Eğer $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ ayrık aralıkların bir sonlu ailesi ve $E\subset J_1\cup\dots\cup J_n$ ise Bölüm 3, Problem 6'ya göre $m(E)=\sum m(E\cap J_i)$ dir. Şimdi $\{J_k\}$'yı sayılabilir ayrık aralıkların bir ailesi olarak alalım. Aşağıdaki ilk eşitsizlikte yarıtoplamsallığı ve son eşitsizlikte monotonluğu kullandığımızda

$$\begin{aligned} m\left(E\cap \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) &\le \sum_{k=1}^{\infty} m(E\cap J_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(E\cap J_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(E\cap(J_1\cup\dots\cup J_n)) \\ &\le m\left(E\cap \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bize, ilk eşitsizliğin bir eşitlik olduğunu söyler ve böylece kanıt tamamlanır. ■

Şimdi ölçünün yerel özelliğini verelim.

Teorem 3: E'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart $(0,1)$'deki her J aralığı için

$$m(E\cap J) + m(E'\cap J) = m(J) \qquad (E' = (0,1)-E)$$

olmasıdır.

Kanıt! $J=(a,b)$'nin $0<a<b<1$ olduğunu kabul edelim. $J_1=(0,a)$, $J_2=J=(a,b)$, $J_3=(b,1)$ olsun. İki elemanlı $\{a,b\}$ kümesinin ölçüsü sıfır olduğu için $m(E-\{a,b\})=m(E)$ ve $m(E'-\{a,b\})=m(E')$ dür, böylece

$$m(E)=m(E\cap J_1)+m(E\cap J_2)+m(E\cap J_3)$$
$$m(E')=m(E'\cap J_1)+m(E'\cap J_2)+m(E'\cap J_3)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bunlar toplanırsa

$$m(E)+m(E')=\sum_{i=1}^{3}\left[m(E\cap J_i)+m(E'\cap J_i)\right]\geq\sum_{i=1}^{3}m(J_i)=1$$

elde edilir. Buna göre $m(E)+m(E')=1$ olması için gerek ve yeter şart

her i için $$m(E\cap J_i)+m(E'\cap J_i)=m(J_i)$$

olmasıdır. Eğer J, $(0,b)$ veya $(a,1)$ aralıklarından biri ise J_1 veya J_3'den yalnız birinin alınmasıyla, çözüm aynı yolla yapılır. ■

E, $(0,1)$ aralığını toplamsal olarak bölerse tanımımız E'nin öl-
çülebilir olduğunu söyler. Teorem 3'e göre, E $(0,1)$'in her alt aralığını top-
lamsal bölerse, E ölçülebilirdir. Şimdi E'nin ölçülebilir olması için gerek
ve yeter şartın E'nin her T alt kümesini toplamsal bölmesi olduğunu gösterece-
ğiz. Bu sonuç, Caratheodory (karatedori)'nin bütün genel kümelerde
ölçülebilirliğin modern tanımıdır. Yani, herhangi bir kümenin bütün alt kü-
melerinde tanımlı, verilen herhangi bir sayılabilir yarıtoplamsal, negatif
olmayan, monoton fonksiyon m'nin, bütün T alt kümeleri için

$$m(E\cap T)+m(E'\cap T)=m(T)$$

şartını sağlayan E kümelerine kısıtlandığında, sayılabilir toplamsal oldu-
ğunu söylüyor.

Teorem 4: E kümesinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her "test kümesi" $T\subset(0,1)$ için

$$m(E\cap T)+m(E'\cap T)=m(T)$$

olmasıdır. m, yarıtoplamsal olduğundan E'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her T için

$$m(E\cap T)+m(E'\cap T)\leq m(T) \qquad (*)$$

olmasıdır.

Kanıt: $T=(0,1)$ alınırsa, $(*)$ ifadesi $m(E)+m(E')\leq m(0,1)=1$ olacağından E ölçülebilirdir. Her ölçülebilir E kümesi için $(*)$ ifadesinin sağlandığını göstermek için, T, $(0,1)$ aralığında herhangi bir küme, $\varepsilon>0$ ve $\{I_j\}$,

$$\sum m(I_j)<m(T)+\varepsilon$$

şartını sağlayan T'nin bir açık örtülüşü olsun. Bu durumda

$$E\cap T\subset E\cap(\cup I_j)=\cup(E\cap I_j)\ ,\quad E'\cap T\subset\cup(E'\cap I_j)$$

dir. E ölçülebilir ise Teorem 3'den her j için

$$m(E\cap I_j)+m(E'\cap I_j)=m(I_j) \qquad (**)$$

dir. Buna göre, monotonluk, yarıtoplamsallık ve $(**)$ denklemini kullanarak

$$m(E\cap T)+m(E'\cap T)\leq\sum m(E\cap I_j)+\sum m(E'\cap I_j)=\sum m(I_j)<m(T)+\varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik her $\varepsilon>0$ için sağlandığından $(*)$ eşitsizliği elde edilir. ∎

Problem 2: E_1 ve E_2 ölçülebilir kümeler ise $m(E_1-E_2)=m(E_1)-m(E_1\cap E_2)$ ve $m(E_1\cup E_2)=m(E_1)+m(E_2)-m(E_1\cap E_2)$ olduğunu gösteriniz. Hipotezin bütün şartlarına ihtiyaç var mıdır?

Şimdi, m'nin ölçülebilir kümeler üzerinde sayılabilir toplamsal ve ölçülebilir kümelerin, sayılabilir birleşimi ve kesişiminin kapalı olduğunu göstereceğiz. Verilecek olan üç teoremde, m fonksiyonunun tanımının nasıl verildiğinin ve $(0,1)$'in alt kümeleriyle yetinmeyip, yalnızca aşağıdaki şu gerçekleri kullanacağız:

$$m(\emptyset)=0$$

$$0\leq m(E)\leq\infty$$

$$E\subset F \text{ ise } m(E)\leq m(F)$$

$$m(\cup E_i)\leq\sum m(E_i)$$

ve bütün T ve ölçülebilir E kümeleri için

$$m(E\cap T)+m(E'\cap T)=m(T),$$

Teorem 5: $\{E_i\}$, sonlu veya sayılabilir ayrık ölçülebilir kümelerin bir ailesi ise

$$m(\cup E_i) = \sum m(E_i)$$

dir

Kanıt: $E_1, E_2, \dots, E_n$ ayrık ölçülebilir kümeler olsun. E_1 ölçülebilir olduğundan, test kümesi olarak $T = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ alındığında

$$m(E_1) + m(E_2 \cup \dots \cup E_n) = m(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n)$$

eşitliğini elde ederiz. Aynı şekilde E_2 ölçülebilir olduğundan, test kümesi $T = E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n$ için

$$m(E_2) + m(E_3 \cup \dots \cup E_n) = m(E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n)$$

elde edilir. Yani

$$m(E_1) + m(E_2) + m(E_3 \cup \dots \cup E_n) = m(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n)$$

dir. Bu şekilde devam edilerek, sonlu adım sonrasında

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi, $\{E_i\}$, sayılabilir ayrık ölçülebilir kümelerin bir ailesi olsun. Her n için

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$$

eşitsizliği gerçeklendiğinden

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

elde edilir. m yarıtoplamsal olduğundan, eşitlik sağlanır. ■

Problem 3 $\{E_i\}$, sayılabilir ayrık ölçülebilir kümelerin bir ailesi ve T herhangi bir küme ise

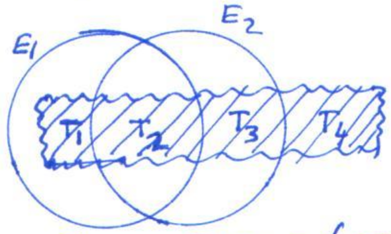
$$m(T \cap \cup E_i) = \sum m(T \cap E_i)$$

olduğunu gösteriniz.

Teorem 5 bize, $\{E_i\}$'ler ölçülebilir ise $m(\cup E_i)$'nin ne olduğunu söylüyor ($\cup E_i$'nin ölçüsünün $\sum m(E_i)$ olduğunu söylüyor), fakat $\cup E_i$'nin kendisinin ölçülebilir olup olmadığını söylemiyor.

Teorem 6: E_1 ve E_2 ölçülebilirse, $E_1 \cup E_2$'de ölçülebilirdir.

Kanıt: E_1 ve E_2 ölçülebilir kümeler ve T herhangi bir test kümesi olsun.



T şekilde gösterildiği gibi $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ olsun.

Biz, $m[(E_1 \cup E_2) \cap T] + m[(E_1 \cup E_2)' \cap T] = m(T)$ olduğunu göstermemiz gerekir veya şekile göre

$$m(T_1 \cup T_2 \cup T_3) + m(T_4) = m(T)$$

olduğunu göstermemiz gerekir. E_2 ölçülebilir kümesi ile $T_1 \cup T_2$ test kümesi bize

$$m(T_1) + m(T_2) = m(T_1 \cup T_2) \qquad (*)$$

eşitliğini verir. Benzer olarak, E_2 ile $T_3 \cup T_4$ kümesini alırsak

$$m(T_3) + m(T_4) = m(T_3 \cup T_4)$$

eşitliği elde edilir. E_1 ile T bize

$$m(T_1 \cup T_2) + m(T_3 \cup T_4) = m(T)$$

eşitliğini verir. Son üç eşitlikten

$$m(T_1) + m(T_2) + m(T_3) + m(T_4) = m(T) \qquad (**)$$

elde edilir. E_1 ile $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ ve sonrasında $(*)$ kullanılırsa

$$m(T_1 \cup T_2) + m(T_3) = m(T_1 \cup T_2 \cup T_3)$$

$$m(T_1) + m(T_2) + m(T_3) = m(T_1 \cup T_2 \cup T_3) \qquad (***)$$

eşitliği elde edilir. $(**)$ ve $(***)$'dan istediğimiz eşitlik

$$m(T_1 \cup T_2 \cup T_3) + m(T_4) = m(T)$$

yi elde ederiz. ■

Sonuç: Ölçülebilir kümelerin sonlu birleşimleri ve kesişimleri ölçülebilirdir. E_1, E_2 ölçülebilir ise $E_1 - E_2$ ölçülebilirdir.

Kanıt: E'nin bütün T'ler için karakterize denklem

$$m(E \cap T) + m(E' \cap T) = m(T)$$

yi sağlamasının gerek ve yeter şartı E' nünde bu denklemi sağlamasıdır. Yani E ölçülebilir ise E', tersine E' ölçülebilir ise E ölçülebilirdir. Bu yüzden, $E_1 \cap E_2 = (E_1' \cup E_2')'$ olduğundan ve E_1, E_2 ölçülebilirliğinden $E_1 \cap E_2$ ölçülebilirdir. $E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2'$ olduğundan $E_1 - E_2$ ölçülebilirdir. Sonlu sayıda kesişim ve birleşim, tümevarım kanıtla yapılır. ■

Teorem 7 $\{E_i\}$ sayılabilir ölçülebilir kümelerin bir ailesi ise $\bigcup E_i$ ve $\bigcap E_i$ ölçülebilirdir. (Sayılabilir sayıda ölçülebilir kümelerin birleşimi ve kesişimi ölçülebilirdir). Açık kümeler ve kapalı kümeler ölçülebilirdir.

Kanıt: $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 - E_1$, $F_3 = E_3 - (E_1 \cup E_2)$, $\ldots$, $F_i = E_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j$ alalım. $G_n = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ olsun. Teorem 6'dan F_i'ler ve G_n ölçülebilirdir. Teorem 5'e göre

$$m(G_n) = \sum_{i=1}^{n} m(F_i)$$

dir. Herhangi test kümesi T için, Problem 3 kullanılırsa

$$m(T) = m(T \cap G_n) + m(T \cap G_n')$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m(T \cap F_i) + m(T \cap G_n')$$

dır. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ alınırsa, keyfi n için $G_n = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \subset E$ dir ve böylece $G_n' \supset E'$ dür. Monotonluktan $m(T \cap G_n') \geq m(T \cap E')$ kullanılırsa

$$m(T) \geq \sum_{i=1}^{n} m(T \cap F_i) + m(T \cap E')$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik, her n için doğru olduğundan yine Problem 3'den

$$m(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(T \cap F_i) + m(T \cap E') = m(T \cap E) + m(T \cap E')$$

sonucunu elde ederiz. Bu da $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$'nin ölçülebilir olduğunu gösterir. Kalan kısım problem olarak verilecektir. ∎

Tanım: Bir X kümesinin S alt kümeler ailesi aşağıdaki şartları sağlar ise S'ye X'de bir <u>σ-cebri</u> denir.

i) $X \in S$

ii) Eğer $A \in S$ ise $A' = X - A \in S$

iii) Eğer $n = 1, 2, \ldots$ için $A_n \in S$ ve $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ise $A \in S$

Teorem: S, bir X kümesi üzerinde herhangi bir σ-cebir ise

a) $\emptyset \in S$

b) $i = 1, 2, \ldots, n$ için $A_i \in S$ ise $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in S$

c) Her $i = 1, 2, \ldots$ için $A_i \in S$ ise $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

d) $A, B \in S$ ise $A - B \in S$

dir.

Kanıt: a) $X \in \mathcal{S}$ olduğundan $\emptyset = X' = X - X \in \mathcal{S}$ dir.

b) $\emptyset \in \mathcal{S}$ olduğundan ve $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ alınırsa $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$ dir.

c) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right)'$ olduğundan $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$ dir.

d) $A - B = A \cap B'$ olduğundan $A - B \in \mathcal{S}$ dir.

Örnekler 1) X herhangi bir küme ve $\mathcal{S} = 2^X$ olsun. $\mathcal{S}$, X'de bir σ-cebirdir.

2) X herhangi bir küme ve $\mathcal{S} = \{X, \emptyset\}$ olsun. $\mathcal{S}$, X'de bir σ-cebirdir.

3) $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{S} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ olsun.

i) $X \in \mathcal{S}$,

ii) $\emptyset' = X - \emptyset = X \in \mathcal{S}$, $X' = X - X = \emptyset \in \mathcal{S}$, $\{a\}' = X - \{a\} = \{b, c\} \in \mathcal{S}$, $\{b, c\} = X - \{b, c\} = \{a\} \in \mathcal{S}$,

iii) $\mathcal{S}$'ye ait bütün kümelerin her türlü birleşimi $\mathcal{S}$'ye ait,

olduğundan $\mathcal{S}$, X üzerinde bir σ-cebirdir.

4) $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{S} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ olsun. $\{a\}' = \{b, c\} \notin \mathcal{S}$ olduğundan $\mathcal{S}$ X üzerinde bir σ-cebri değildir.

5) $X = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ ve $\mathcal{S} = \{\emptyset, X, \{1, 3, 5, \dots\}, \{2, 4, 6, \dots\}\}$ olsun. $\mathcal{S}$, X üzerinde bir σ-cebirdir.

6) X sayılamaz bir küme ve $\mathcal{S}$, X'in sayılabilir veya bütünleyenleri sayılabilir alt kümeler ailesi olsun.

i) $X' = \emptyset \in \mathcal{S}$ olduğundan, $X \in \mathcal{S}$ dir.

ii) $A \in \mathcal{S}$ olsun. a) A sayılabilir veya b) A' sayılabilirdir.

a) A sayılabilir ise $(A')' = A$ sayılabilir olduğundan $A' \in \mathcal{S}$ dir.

b) A' sayılabilir olduğundan (kendisi), $A' \in \mathcal{S}$ dir.

iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ olsun. a) $A_1, A_2, \dots$ hepsi sayılabilir ise sayılabilir sayıda sayılabilir kümelerin birleşimi sayılabilir olduğundan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$.

b) A_i'lerden en az birinin bütünleyini sayılabilir ise $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i'$ sayılabilir sayıda olacaktır. Yani $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$ dir.

Üç koşulda sağlandığından $\mathcal{S}$, X üzerinde bir σ-cebirdir.

Problem 4: $(0,1)$'deki ölçülebilir alt kümelerin bir σ-cebri oluşturduğunu gösteriniz. Ayrıca açık ve kapalı kümelerin ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

Problem 5: E, $(0,1)$'in ölçülebilir bir alt kümesi olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısı için, $F\subset E\subset U$ ve

$$m(E)-\varepsilon < m(F) \leq m(U) < m(E)+\varepsilon$$

şartlarını sağlayan bir U açık kümesi ve bir F kapalı kümesinin olduğunu gösteriniz. Her $\varepsilon>0$ sayısı için böyle U ve F kümelerinin var olmasının E'nin ölçülebilir olması için yeterli olduğunu gösteriniz.

Şimdi, Lebesgue ölçüsü tanımını, $\mathbb{R}$'nin herhangi alt kümelerine genişletelim. Genişletilmiş ölçü fonksiyonu için μ'yü kullanacağız. Buna göre μ, $\mathbb{R}$'nin bütün alt kümelerinde tanımlıdır. $E\subset(n,n+1)$ kümesi için, $E-n=\{x-n \mid x\in E\}$ olmak üzere

$$\mu(E)=m(E-n)$$

olarak tanımlanacaktır. $E\subset(0,1)$ ise $\mu(E)=m(E)$ olarak tanımlayacağımız açıktır. $\mathbb{R}$'deki herhangibir E kümesi için

$$\mu(E)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu(E\cap(n,n+1))$$

ile tanımlanır. Biz hala, sayılabilir sayıdaki kümelerin ölçüsünün sıfır olmasını istediğimizden, E kümesi tamsayıları içeriyorsa, bu $\mu(E)$ nin değerine etki yapmayacaktır. Bu arada, $\mathbb{R}$'de $\mu(E)=\infty$ olma olasılığına dikkat edelim. Yani, m'nin aksine μ sonlu olmayabilir.

E'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şartın her n için $E\cap(n,n+1)$'in ölçülebilir olması gerektiğini söyleyeceğiz. Yani her n için

$$\mu(E\cap(n,n+1))+\mu(E'\cap(n,n+1))=1$$

ise E ölçülebilirdir. Bunun yerine, ölçülebilirlik tanımı için, Karatedori'nin kriterini kullanırız. Şimdiki teoremde bunu gösterelim.

Teorem 8: Her $T \subset \mathbb{R}$ kümesi için
$$\mu(E \cap T) + \mu(E' \cap T) = \mu(T)$$
ise bir $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ölçülebilirdir.

Kanıt: Her n için $T = (n, n+1)$ alınırsa, her $E \cap (n, n+1)$ ölçülebilirdir. Yani E ölçülebilirdir. Teoremin terside doğrudur. Yani E ölçülebilir ise her T için teoremdeki eşitlik sağlanır. Tanımdan,
$$\mu(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(T \cap (n, n+1))$$
$$\mu(T \cap E) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(T \cap E \cap (n, n+1))$$
$$\mu(T \cap E') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(T \cap E' \cap (n, n+1))$$
dir. E ölçülebilir ise her n için
$$\mu(T \cap E \cap (n, n+1)) + \mu(T \cap E' \cap (n, n+1)) = \mu(T \cap (n, n+1))$$
olduğundan, bunların toplamı
$$\mu(E \cap T) + \mu(E' \cap T) = \mu(T)$$
eşitliğini verir. ∎

Teorem 5, 6, 7'de kanıtladığımız, m'nin ölçülebilir kümeler üzerindeki özellikleri, sayfa 23'de verilen gerçeklere dayanıyordu. Yani

- $m(\emptyset) = 0$
- Her E için $0 \leq m(E) \leq \infty$
- $E \subset F$ ise $m(E) \leq m(F)$
- Her $\{E_i\}$ için $m(\cup E_i) \leq \sum m(E_i)$
- E'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her T için $m(E \cap T) + m(E' \cap T) = m(T)$ olmasıdır.

İlk dört özellik, μ ve $\mathbb{R}$'nin alt kümeleri için sağlanır. Teorem 8 ise son özelliğin, ölçülebilir kümeleri $\mathbb{R}$'de karakterize etmekte kullanılabileceğini göstermektedir.

Bu yüzden, μ ve $\mathbb{R}$'nin ölçülebilir alt kümeleri, Teorem 5, 6, 7'nin özelliklerini sağlar. Yani

Ayrık aileler için $\mu(\cup E_i)=\sum \mu(E_i)$

E_1, E_2 ölçülebilir ise $E_1 \cup E_2$ ölçülebilir

Her i için E_i ölçülebilir ise $\cup E_i$ ölçülebilir.

IR'deki ölçülebilir kümeler bir σ-cebir oluşturur ve bu σ-cebir üzerinde μ sayılabilir toplamsaldır.

Problem 6: μ'nün öteleme altında değişmez olduğunu gösteriniz. Yani $E+x=\{y+x \mid y\in E\}$ ise her E ve x için $\mu(E)=\mu(E+x)$ dir.

Şimdi, $(0,1)$'de ölçülemeyen bir E alt kümesinin inşasını verelim. E'nin ölçülebilir olmadığını göstermek için, E'nin bir sayılabilir ayrık ötelemelerinin birleşiminin $(0,1)$ olduğunu göstereceğiz. Bu durumda, eğer E ölçülebilse ve $m(E)=0$ olsa $m(0,1)=\sum_{n=1}^{\infty} m(E)=0$ sonucu elde edilirdi, $m(E)>0$ olsa ise $m(0,1)=\sum_{n=1}^{\infty} m(E)=\infty$ sonucu elde edilirdi ki, her iki durumda da çelişki elde edilmiş olur.

Aşağıda 'inşa' edilecek olan ölçülemeyen küme E, seçim aksiyomu veya Zorn Lemma gibi ona denk olan teoriye bağlıdır.

$(0,1)$ aralığından bir x noktasını alalım, yani $x\in(0,1)$ seçelim. Sonra, $y-x$ farkı rasyonel olmayan, $(0,1)$ aralığından bir y noktasını alalım. Daha sonra $z-x$ ve $z-y$ farkları rasyonel olmayan $(0,1)$ aralığından bir z noktasını alalım. Bu işleme, seçilen sayılardan birine eklendiğinde rasyonel olmayan sayı kalmayana kadar devam edelim. Yani $(0,1)$ aralığında farkları rasyonel olmayan sayılar kalmayıncaya kadar devam ediyoruz. Bu yüzden, bu şekilde elde edilen E kümesi, $x,y\in E$ için bütün $x-y$ farkları irrasyonel sayılar olan $(0,1)$'in bir maksimal alt kümesidir. Buna göre, her $t\notin E$ için bir $x\in E$ ve bir r rasyonel sayısı için $t=x+r$ dir. $[0,1)$ aralığındaki rasyonel sayıları $r_1, r_2, r_3, \dots$ olarak numaralandıralım ve E_n, $x\in E$ için bütün

$x+r_n$ (mod 1) sayılarını içersin. Yani $x \in E$ ve $x+r_n < 1$ ise $x+r_n \in E_n$, $x+r_n > 1$ ise $x+r_n - 1 \in E_n$ dir. E_n'ler yalnızca E'nin ötelemeleri olduğundan hepsi aynı ölçüye sahiptirler. E_n'ler ayrıktır; $x, y \in E$ ve $x+r_n = y+r_m$ veya $x+r_n-1 = y+r_m-1$ için $x-y=$ rasyonel olacağı için $x=y$ dir. Her $t \notin E$, bir $x \in E$ ve bir r_n rasyonel sayısı için $x+r_n$ (mod 1) formuna sahip olduğundan, açıktır ki $(0,1) = \cup E_n$ dir. Bu yüzden, $(0,1)$ aralığı, aynı ölçüye sahip ayrık kümelerin bir sayılabilir birleşimidir. Eğer E ölçülebilirse, bütün E_n'ler ölçülebilir ve $m(0,1) = \sum m(E)$ dir. Bu toplam ise ya sıfır yada sonsuzdur. Dolayısıyla E ölçülemeyen bir kümedir.

<u>Problem 7:</u> Karatedori karakterisazyonunu kullanarak, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $A \subset E \subset B$ ve $\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$ şartlarını sağlayan A ve B ölçülebilir kümeleri varsa E'nin ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

<u>Problem 8:</u> i) $\{E_i\}$, $\mu(E_1) < \infty$ ve $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ şartlarını sağlayan bir ölçülebilir kümeler dizisi ise $\mu(\cap E_i) = \lim \mu(E_i)$ olduğunu gösteriniz.

ii) $\mu(E_1) < \infty$ (veya bir n için $\mu(E_n) < \infty$) ifadesinin gerekli bir şart olduğunu gösteriniz.

<u>Problem 9:</u> $\{E_i\}$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ şartlarını sağlayan bir ölçülebilir kümeler dizisi ise $\mu(\cup E_i) = \lim \mu(E_i)$ olduğunu gösteriniz.

Sayılabilir sayıdaki bir kümenin ölçüsünün sıfır olduğunu gördük. Şimdi sorumuz şu: kontinyum kuvvete sahip ve ölçüsü sıfır olan bir küme var mıdır? Bu sorunun cevabı olumludur. Yani böyle bir küme vardır. Bu kümeye örnek Cantor'un kümesidir.

Cantor kümesi (1883)

$[0,1]$ kapalı aralığını üç eşit parçaya bölüp, ortadaki $U_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ açık aralığını atıyoruz. Sonra, geriye kalan $[0,\frac{1}{3}]$ ve $[\frac{2}{3},1]$ kapalı aralıklarını tekrar teker teker üç eşit parçaya bölüp, ortadaki açık aralıkları atıyoruz. Yani $U_2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ denirse, $[0,1]-\bigcup_{i=1}^{2}U_i$ işlemini yapıyoruz. Bu işlemi sonsuza kadar devam ettirdiğimizde atılan parçalardan sonra kalan bu kapalı aralıkların kesişimine <u>Cantor kümesi</u> diyoruz. Cantor kümesi, $[0,1]-\bigcup U_n$ kümesidir.

Kalan Parçalar

Atılan Parçalar

$F_0=[0,1]$ $\qquad$ $G_0=U_0=\emptyset$

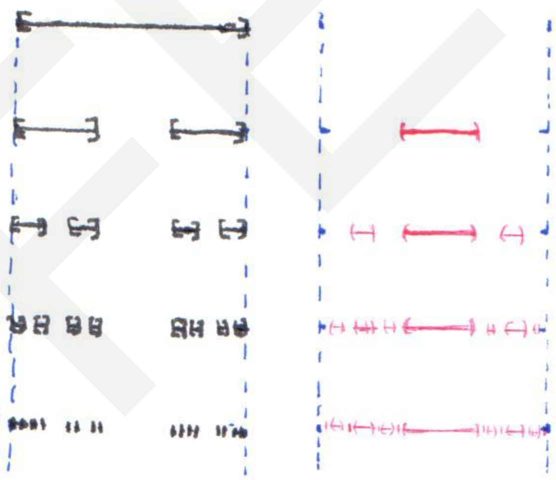
$F_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$ $\qquad$ $G_1=U_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

$F_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]\cup[\frac{7}{9},\frac{8}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$ $\qquad$ $G_2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})=U_1\cup U_2$

$F_3=[0,\frac{1}{3^3}]\cup[\frac{2}{3^3},\frac{3}{3^3}]\cup[\frac{6}{3^3},\frac{7}{3^3}]\cup[\frac{8}{3^3},\frac{9}{3^3}]\cup[\frac{18}{3^3},\frac{19}{3^3}]\cup[\frac{20}{3^3},\frac{21}{3^3}]\cup[\frac{24}{3^3},\frac{25}{3^3}]\cup[\frac{26}{3^3},\frac{27}{3^3}]$ $\qquad$ $G_3=(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3})\cup(\frac{3}{3^3},\frac{6}{3^3})\cup\cdots\cup(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3})=U_1\cup U_2\cup U_3$

$F_4=[0,\frac{1}{3^4}]\cup\cdots\cdots\cup[\frac{80}{3^4},\frac{3^4}{3^4}]$ $\qquad$ $G_4=U_1\cup U_2\cup U_3\cup U_4$

$F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$ $\qquad$ $G_0\subset G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_n\subset\cdots$



<u>Cantor kümesi</u>: $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ veya $F=[0,1]-\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ dir.

Cantor kümesinin özellikleri:

1) $\forall n\in\mathbb{N}$ için F_n'ler kapalı küme olduklarından ve keyfi sayıda kapalı kümenin kesişimi kapalı olduğundan Cantor kümesi kapalıdır.

2) Kapalı kümeler ölçülebilir olduğundan Cantor kümesi ölçülebilirdir.

3) $F_n=G_n'$ (veya $F_n'=G_n$) $\qquad$ ($U_n=G_n-G_{n-1}$ ayrık)

4) $G=F'=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\right)'=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n'=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n-G_{n-1})=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$

5) $\mu(U_n)=\mu(G_n-G_{n-1})=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ve $\mu(F_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ dir.

6) Cantor kümesinin ölçüsü sıfırdır. Yani $\mu(F)=0$ dır.

1. Yol: $\mu(G)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(U_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n=1$

$$[0,1]=G\cup F \Rightarrow \mu([0,1])=\mu(G)+\mu(F) \Rightarrow 1=1+\mu(F) \Rightarrow \mu(F)=0$$

2. Yol: Problem 8'e göre $\mu(F)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ dır.

7) Cantor kümesi F, F_n kümelerinin bütün sınır noktalarını içerdiğinden, örneğin, $0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2},\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2},\ldots$ boş küme değildir. Yani $F\neq\emptyset$ dır. Her F_n tam 2^{n+1} sınır noktasına sahiptir. n elemanlı bir A kümesinin bütün alt kümelerinin sayısı 2^n dir. Buna göre F, doğal sayıların bütün alt kümesine denktir. Sayılabilir sayıda bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı kontinyum kuvvetinde olduğundan F'nin kuvveti kontinyumdur.

8) Cantor kümesi aralıklar içermez. (Yani Cantor kümesi hiçbir yerde yoğun değildir).

1.yol: Atılan aralıkların uzunluğu $\mu(G)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(U_n)=1$ dir. Aralığın uzunluğuda 1 olduğundan Cantor kümesi aralık içermez.

2.yol: Atılan aralıklar $\left(\frac{3k+1}{3^n},\frac{3k+2}{3^n}\right)$, $0\leq k\leq 3^{n-1}-1$, $n=1,2,\ldots$ formundadır. Verilen herhangi bir $(a,b)\subset(0,1)$ aralığı için yeterince büyük n'ler için $\left(\frac{3k+1}{3^n},\frac{3k+2}{3^n}\right)\subset(a,b)$ dir.

9) Cantor kümesinin her elemanı, limit noktasıdır. $x_0\in F$ ve (a,b), x_0'ı içeren herhangi bir aralık olsun. $x_0\in F$ olduğundan her n için $x_0\in F_n$ dir. ($x_0\in\cap F_n$). I_n, x_0'ı içeren F_n'nin bir kapalı aralığı olsun. Herhangi bir I_n aralığının uzunluğu $\frac{1}{3^n}$ olduğundan yeterince büyük n'ler için $I_n\subset(a,b)$ seçebiliriz. Seçtiğimiz sayıya N dersek, $n\geq N$ için $I_n\subset(a,b)$ dir. I_N'nin uç noktalarından en az birisi x_0'dan farklıdır. Yani, x_0'ı içeren her komşulukta, x_0'dan farklı Cantor kümesine ait bir nokta vardır. Dolayısıyla x_0, Cantor kümesinin bir limit noktasıdır.